А. М. МОЛЧАНОВ

Равномерная асимптотика линейных систем с малым параметром при производной.

(Москва)

В докладе сформулирован метод последовательных приближений для решения систем уравнений вида:

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t)\, x \tag{1}$$

Доказано, что последовательные приближення сходятся для достаточно малых ε со скоростью геометрической прогрессии. Несложным видоизменением метода можно получить сходимость со скоростью метода Ньютона,

Основа метода—замена линейной системы (1), нелинейной системой, да еще с большим числом уравнений, но зато имеющей, в отличие от (1), простое поведение при $\varepsilon \to +0$.

Решение (1) ищется в виде:

$$x(t) = PQx_0, \tag{2}$$

где P и Q треугольные матрицы. Для определенности будем считать, что P имеет нули выше диагонали и единицы на диагонали. Замечательный алгебраический факт состоит в

Межвузовский симпозиум по качественной теории дифференциальных уравнений и ее применениям. Самарканд, 1964.

том, что из (1) можно исключить Q и получить уравнение для одного только P:

$$\varepsilon\frac{dp}{dt}=PT(P^{-1}AP) \tag{3}$$

($T(M)$ означает нижнюю треугольную часть матрицы M).

Если P известно, то для Q получается линейное уравнение

$$\varepsilon\frac{dQ}{dt}=BQ, \tag{4}$$

но уже с треугольной матрицей B,

$$B=P^{-1}AP-T(P^{-1}AP), \tag{5}$$

так что его решение сводится к последовательным квадратурам.

Задача сведена, таким образом, к построению хотя бы одного решения нелинейного уравнения (3), имеющего предел при $\varepsilon\to+0$. Однако нулевое приближение, получающееся, если положить $\varepsilon=0$,

$$T(P_0^{-1}AP_0)=0 \tag{6}$$

недостаточно, так как P нужно взять с точностью до ε^2. Нужное приближение получается, если продифференцировать (3), подставить вместо P его выражение и откинуть член с ε^2:

$$\frac{\partial F}{\partial P}F(P)+\varepsilon\frac{\partial F}{\partial t}=0, \tag{7}$$

где $F(P,t)=PT(P^{-1}AP)$ — правая часть уравнения (3).

Если $P_1(t,\varepsilon)$ — решение алгебраического уравнения (7), то решение P дифференциального уравнения (3) ищем в виде:

$$P=P_1\Pi \tag{8}$$

Уравнение для Π имеет тот же вид, что и (3), но с измененной матрицей A_1

$$A_1=P_1^{-1}AP_1-\varepsilon P_1^{-1}P^1 \tag{9}$$

Если T_1, $\perp_1$, λ_1 — три матрицы, равные, соответственно нижней треугольной, верхней и диагональной части матрицы A_1, то нетрудно проверить, что уравнение для Π можно переписать в виде

$$\varepsilon\frac{d\Pi}{dt}=T_1\Pi+\lambda_1\Pi-\Pi\lambda_1+\Pi T(\Pi^{-1}\perp_1\Pi) \tag{10}$$

Поставив индекс „$n+1$" в первых четырех линейных членах и индекс „n" в единственном нелинейном члене, получим метод последовательных приближений. Этот метод обладает нужными свойствами на каждом отрезке изменения

t, где не пересекаются действительные части собственных значений матрицы $A(t)$.